Zur Zustandsänderungskomplexität von Zellularautomaten

Diplomarbeit

von Torsten Suel

Aufgabenstellung : Prof. Dr. R. Vollmar

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

Braunschweig, im Juli 1990

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

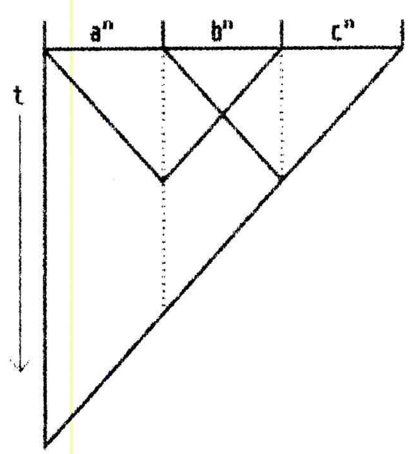
Um die Möglichkeiten von Zellularautomaten als Modell der Parallelverarbeitung besser zu verstehen, wurden bisher unter andererm die benötigte Zeit, die Zustandsmenge, der Platzbedarf und die Anzahl und Art der Verbindungen als Maß für die Komplexität eines Problems untersucht.

Betrachtet man die Erkennung formaler Sprachen in Zellularautomaten, so kann mit diesen Größen nur eine relativ grobe Einteilung der parallel zu bearbeitenden Probleme erreicht werden. Da die Menge der von Zellularautomaten in Realzeit erkannten Sprachen recht groß ist, andererseits aber eine Erkennung sinnvoller Sprachen in kürzerer Zeit nicht möglich ist, werden weitere Komplexitätsmaße zur besseren Strukturierung der von Zellularautomaten erkannten Sprachen benötigt.

Eine Möglichkeit zur Untersuchung des zur Erkennung formaler Sprachen nötigen Informationsaustausches zwischen einzelnen Blöcken des Zellularautomaten liefert die in [Vo81] eingeführte sogenannte Zustandsänderungskomplexität. Diese bezeichnet die in Zellularautomaten zur Erkennung formaler Sprachen benötigte Anzahl von Zustandsänderungen der Einzelzellen. Dazu wird zwischen der Gesamtsumme der in einem Zellularautomaten stattfindenden Zustandsänderungen und der Maximalzahl der in jeder einzelnen Zelle erfolgenden Zustandsänderungen unterschieden, die als sum-Zustandsänderungszahl bzw. als max-Zustandsänderungszahl bezeichnet werden. Die sum-Zustandsänderungszahl steht dabei für die insgesamt in einem Zellularautomaten stattfindende Informationsübertragung, die max-Zustandsänderungszahl dagegen kann Hinweise auf Engpässe des Informationsflusses im Gesamtautomaten liefern. Diese Begriffe werden nun am Beispiel der Sprache $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ erläutert.

Ein einfaches Erkennungsverfahren für diese Sprache ist in Abbildung 1.1 als Raum-Zeit-Diagramm dargestellt. Es werden dabei vom ersten Zeichen des a-Teilwortes und vom letzten Zeichen des b-Teilwortes und vom ersten Zeichen des b-Teilwortes und vom letzten Zeichen des c-Teilwortes Signale in der skizzierten Weise gestartet. Treffen sich diese Signale genau auf den Grenzen zwischen dem a- und dem b-Teilwort sowie zwischen dem b- und dem c-Teilwort, so wird die Eingabe akzeptiert.

Abb. 1.1 Erkennung von $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ in einem Zellularautomaten



Kapitel 1 : Einleitung

Jedes der mit Geschwindigkeit 1 fortschreitenden Signale verursacht in den durchlaufenen Zellen je eine Zustandsänderung. daraus ergibt sich bei Eingabe eines Wortes w eine sum-Zustandsänderungszahl von $\frac{7}{3}$ |w| und eine max-Zustandsänderungszahl von 3.

Einige Ergebnisse über die sum- und max-Zustandsänderungskomplexitäten und die erkannten Sprachklassen finden sich in [Vo82a], [Vo82b] und [Vo84].

In dieser Arbeit wird nun in erster Linie die max-Zustandsänderungskomplexität betrachtet. Dabei wird zwischen unidirektionalen und bidirektionalen Zellularautomaten unterschieden, und die Auswirkungen einer Beschränkung der Automaten auf Realzeit wird untersucht.

Nach den grundlegenden Definitionen werden in Kapitel 3 die Klassen der von Zellularautomaten mit unterschiedlicher max-Zustandsänderungsbeschränkung erkannten Sprachen untersucht, anschließend werden die mit einer konstanten Anzahl von Zustandsänderungen pro Zelle erkannten Sprachen gesondert betrachtet.

In Kapitel 5 wird versucht, die Ergebnisse der Betrachtung der Zustandsänderungskomplexität zu nutzen, um eine effiziente Pipeline-Verarbeitung in zellularen und systolischen Automaten zu erreichen, die Idee dazu stammt aus [Vo87]. Im nächsten Kapitel wird versucht, einige der erhaltenen Ergebnisse mit Hilfe eines naiven Modells der in Zellularautomaten stattfindenden Kommunikation zu veranschaulichen, zum Abschluß werden noch einige Teilergebnisse und offenen Fragen aufgeführt.

2. Begriffe und Definitionen

In diesem Kapitel werden die der Betrachtung der Zustandsänderungskomplexität von Zellularautomaten zugrundeliegenden Begriffe und Definitionen eingeführt. Dies geschieht durch eine informelle Beschreibung des betrachteten Zellularautomatenmodells. Anschließend werden die max- und sum-zustandsänderungsbeschränkten Zellularautomaten und die zugehörigen Sprachklassen definiert.

2.1 Verwendete Notationen

Im folgenden werden die wichtigsten in dieser Arbeit verwendeten Schreibweisen angegeben. Es werden dabei grundlegende Kenntnisse der Theorie der formalen Sprachen und Automaten vorausgesetzt.

Das Alphabet einer formalen Sprache wird, sofern nicht anders angegeben, mit V, die Zustandsmenge von Automaten mit A bezeichnet. Auf die erzeugenden Grammatiken der betrachteten Sprachen wird grundsätzlich nicht eingegangen, stattdessen werden die Sprachen durch die Eigenschaften ihrer Wörter definiert.

Ist V eine endliche Menge, so gilt:

- V^* ist die Menge der Wörter über V.
- V^n ist die Menge aller Wörter der Länge n über V.
- $\overline{V^n}$ ist die Menge aller Wörter mit Länge $\leq n$ über V.
- λ ist das leere Wort.
- V^+ ist die Menge aller Wörter über X mit Ausnahme des leeren Wortes.

Ist $w \in V^*$ ein Wort über V, so gilt:

- $|w|$ ist die Länge von w.
- w_k ist das k-te Zeichen von w.
- $w_{k,l}$ ist das Teilwort $w_k w_{k+1} \ldots w_l$ von w.
- w^R ist das Spiegelbild von w.

Sind A und B Mengen, so bedeuten:

- $A \subset B$: A ist echt in B enthalten.
- $A \subseteq B$: A ist in B enthalten.
- $A \not\subset B$: A und B sind unvergleichbar.
- $|A|$ ist die Kardinalität der Menge A.

Sind V und W endliche Mengen, $L_1 \subseteq V^*$ und $f : V^* \longrightarrow W^*$, so gilt :

- $f(L_1) := \{ f(w) \mid w \in L_1 \}$.
- $(L_1)^R := \{ w^R \mid w \in L_1 \}$.

Weitere Schreibweisen in dieser Arbeit sind :

- $\binom{n}{k}$ heißt Binomialquotient (n über k).
- $\forall$ wird als Allquantor und $\exists$ als Existenzquantor verwendet.
- $\ln n$ ist der natürliche Logarithmus von n.
- $\mathrm{ld}\, n$ ist der Logarithmus von n zur Basis 2.
- $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ und $\mathfrak{L}_3$ bezeichnen die Familien der kontext-sensitiven, kontextfreien und regulären Sprachen.
- $f = O(g) \;:\Longleftrightarrow\; \exists k \in \mathbb{N} (\forall n \in \mathbb{N} : f(n) \leq k \cdot g(n))$.
- max M ist das Maximum der Menge M.
- sum M bezeichnet die Summe aller Elemente der Menge M.

Die folgenden Schreibweisen werden nochmals in den entsprechenden Abschnitten definiert und hier nur der Vollständigkeit halber aufgeführt:

- $\ln_{(k)} n := \begin{cases} \ln\left(\ln_{(k-1)} n\right) & k > 1 \\ \ln n & k = 1 \end{cases}$ (aus Definition 3.2 b))

- $2^n_{(k)} := \begin{cases} 2^{\left(2^n_{(k-1)}\right)} & k > 1 \\ 2^n & k = 1 \end{cases}$ (aus Definition 3.2 b))

- $\mathfrak{K}$ ist die Menge der in Kapitel 3 nachgewiesenen Zustandsänderungskomplexitäten und wird in Abschnitt 3.5 definiert.

2.2 Zellularautomaten als Spracherkenner

In diesem Abschnitt werden die in dieser Arbeit betrachteten Typen von Zellularautomaten (ZA) vorgestellt und ihre Funktionsweise informell beschrieben. Für exakte Definitionen sei auf [Vo79] verwiesen.

Ausgangspunkt für die Untersuchung der Zustandsänderungskomplexität ist ein eindimensionaler, deterministischer Zellularautomat $\mathfrak{A}$ = (A,1,N,F), den man sich als eine unendliche Kette von endlichen Automaten vorstellen kann. Die Einzelautomaten sind dabei nach einem im ganzen Zellularautomaten gleichen Schema, das durch den Nachbarschaftsindex N bestimmt wird, miteinander verbunden. F ist die globale Überführungsfunktion, die die in einem Schritt mögliche Änderung des Gesamtzustands des ZA beschreibt. Der Folgezustand jedes Einzelautomaten ist dabei von seinem eigenen Zustand und dem der mit ihm verbundenen Automaten in deterministischer Weise abhängig. Er wird durch die sogenannte lokale Überführungsfunktion bestimmt, die für alle Einzelautomaten eines ZA gleich ist.. Die Zustandsmenge der endlichen Automaten wird mit A bezeichnet; durch die 1 in der zweiten Komponente wird die Dimension des Zellularautomaten festgelegt.

Durch die Wahl des Nachbarschaftsindexes N werden die möglichen Richtungen und Geschwindigkeiten des Datenflusses im ZA bestimmt. Es werden hier nur Zellularautomaten mit H_1- oder $\overline{H}_1$-Raster betrachtet.

Bei einem Zellularautomaten mit H_1-Raster ist der Folgezustand eines Automaten abhängig vom eigenen Zustand und dem des linken und rechten Nachbarn. Ein solcher ZA wird auch als bidirektionaler Zellularautomat bezeichnet. Im Falle eines ZA mit $\overline{H}_1$-Raster wird der Folgezustand durch den eigenen Zustand und den des rechten Nachbarn bestimmt, es ist daher nur Kommunikation in einer Richtung möglich.

Ein solcher unidirektionaler Zellularautomat (UZA) ist also ein Spezialfall des bidirektionalen Zellularautomaten, der im folgenden einfach als ZA bezeichnet wird. Die Definitionen in den nächsten Abschnitten, die für ZA formuliert werden, gelten daher sowohl für unidirektionale als auch für bidirektionale Zellularautomaten. Es werden zunächst nur diese beiden Typen von Zellularautomaten untersucht, in Kapitel 5 werden dann weitere Automatentypen eingeführt.

Die Funktionsweise der beiden hier vorgestellten Typen von Zellularautomaten wird in den folgenden Skizzen am Beispiel der Eingabe $w = a_1 a_2 \ldots a_n$ dargestellt.

Abb. 2.1 Zellularautomat mit H_1-Raster und akzeptierender Zelle am linken Rand der Retina (ZA)

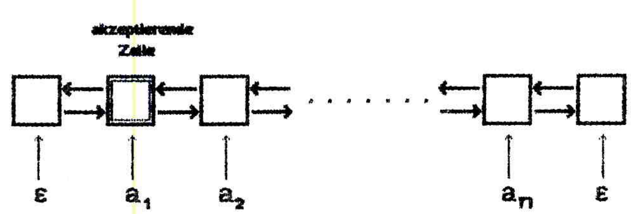
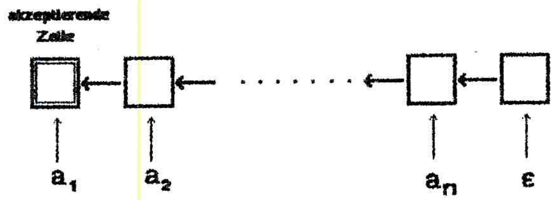


Abb. 2.2 Zellularautomat mit Raster $\bar{H}_1$ und akzeptierender Zelle am linken Rand der Retina (UZA)



Zur Erkennung von formalen Sprachen in Zellularautomaten werden noch einige weitere Vereinbarungen benötigt. Es wird ohne Einschränkung vorausgesetzt, daß das Alphabet V der zu erkennenden Sprache in der Zustandsmenge A enthalten ist. Zu Beginn des Erkennungsprozesses wird die Eingabe parallel in die Zellen des Zellularautomaten geladen, wobei jedes Zeichen des Eingabewortes von einer anderen Zelle eingelesen wird. Die Zellen links und rechts vom Eingabebereich, der sogenannten Retina, werden mit einem speziellen Begrenzungszustand ε geladen, so daß die beiden Randzellen (beim UZA nur die Zelle am rechten Rand) ihre Position im Gesamtautomaten identifizieren können.

Der Zellularautomat verändert nun in jedem Berechnungsschritt seinen Zustand entsprechend der globalen Überführungsfunktion F. Dabei kann keine mit ε markierte Zelle ihren Zustand ändern, so daß die gesamte Berechnung in der Retina stattfindet. Ein Eingabewort wird vom ZA akzeptiert, wenn die akzeptierende Zelle am linken Rand der Retina im Verlauf der Berechnung einen speziellen Zustand $\alpha \in A$ annimmt. Wird dagegen der Zustand $\omega \in A$ angenommen, so wird die Eingabe nicht akzeptiert.

Der zu einem Eingabewort w gehörende Anfangszustand eines Zellularautomaten wird mit c_0^w, der Zustand zum Zeitpunkt t entsprechend mit c_t^w bezeichnet. Der Zustand der i-ten Zelle von links zum Zeitpunkt t wird $c_t^w(i)$ geschrieben.

Definition 2.1 **Es sei $\mathfrak{A} = (A, 1, N, F)$ ein Zellularautomat mit Eingabealphabet $V \subset A$ und $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.**

a) $L_{\mathfrak{A}} := \{ w \in V^+ \mid c_t^w(1) = \alpha$ für ein t aus $\mathbb{N}$ \} ist die von $\mathfrak{A}$ erkannte Sprache.

b) $\mathfrak{A}$ ist τ-zeitbeschränkt $:\Longleftrightarrow \forall w \in V^+ (\exists t \leq \tau(|w|) : c_t^w(1) \in \{\alpha, \omega\})$

c) ZA_τ ist die Menge aller Sprachen, die von einem τ-zeitbeschränkten ZA erkannt werden.

d) UZA_τ ist die Menge aller Sprachen, die von einem τ-zeitbeschränkten UZA erkannt werden.

Die Menge der in Realzeit von einem ZA bzw. UZA erkannten Sprachen wird mit ZA_R bzw. UZA_R bezeichnet.

2.3 Verhaltensfolgen und zustandsänderungsbeschränkte ZA

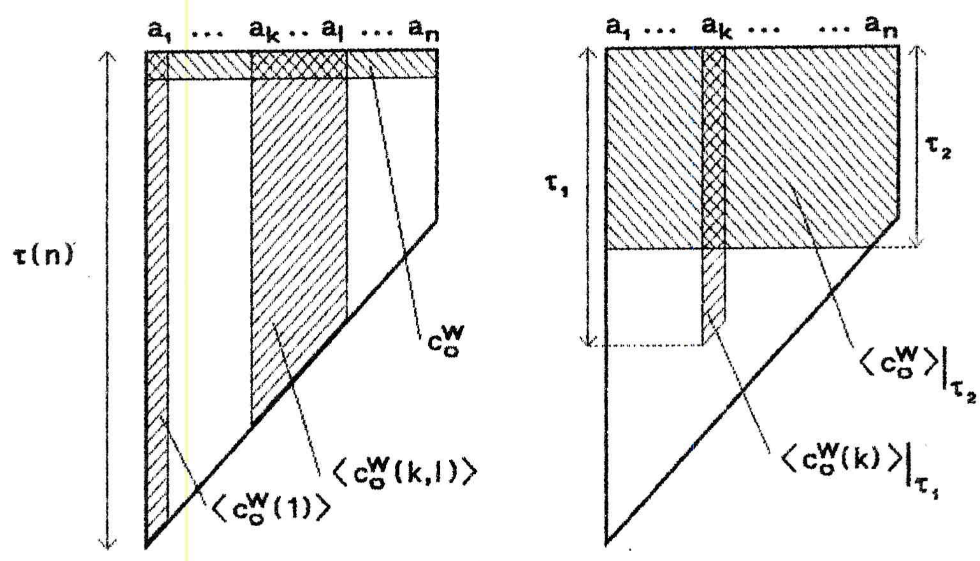
Für die im letzten Abschnitt eingeführten Zellularautomaten mit H_1- bzw. $\overline{H}_1$-Raster werden nun die für die Betrachtung der Zustandsänderungskomplexität benötigten Begriffe definiert. Die Definitionen und Bezeichnungen stammen dabei weitgehend aus [Vo81]. Dazu werden zuvor noch einige Schreibweisen eingeführt.

Die unendliche Folge von Gesamtzuständen c_0^w, c_1^w, c_2^w, ... eines Zellularautomaten wird als Verhaltensfolge $\langle c_0^w \rangle$ bezeichnet. $\langle c_0^w(i,j) \rangle$ ist die räumliche Beschränkung der Verhaltensfolge auf die Zellen i bis j des ZA, $\langle c_0^w(i) \rangle$ entsprechend die Beschränkung auf die i-te Zelle.

Eine $\varkappa$-Verhaltensfolge $\langle c_0^w \rangle|_\varkappa$ ist die zeitliche Beschränkung einer Verhaltensfolge $\langle c_0^w \rangle$ auf die endliche Teilfolge $c_0^w, c_1^w, \ldots, c_\varkappa^w$ von Zuständen.

Diese Begriffe sind im folgenden Raum-Zeit-Diagramm noch einmal skizziert:

Abb. 2.3 Skizze einer Verhaltensfolge $\langle c_0^w \rangle$ mit $w = a_1 a_2 \ldots a_n$ in einem τ-zeitbeschränkten Zellularautomaten



Definition 2.2 Es sei $\mathfrak{A} = (A, 1, N, F)$ ein Zellularautomat mit Eingabealphabet $V \subset A$, $w \in V^+$ und $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

a) $ä(w,i) := |\{ t \mid c_t^w(i) \neq c_{t+1}^w(i) \}|$ ist die Anzahl der Zustandsänderungen in der i-ten Zelle bei Eingabe von w.

b) $\ddot{a}max(w) = max\{ \ddot{a}(w,i) \mid 1 \le i \le |w| \}$ heißt max-Änderungszahl zur Eingabe w.

c) $\ddot{a}sum(w) := sum\{ \ddot{a}(w,i) \mid 1 \le i \le |w| \}$ heißt sum-Änderungszahl zur Eingabe w.

d) $\mathfrak{A}$ ist g-max-zustandsänderungsbeschränkt

$$:\Longleftrightarrow \quad \forall w \in V^+ (\ddot{a}max(w) \le g(|w|))$$

e) $\mathfrak{A}$ ist g-sum-zustandsänderungsbeschränkt

$$:\Longleftrightarrow \quad \forall w \in V^+ (\ddot{a}sum(w) \le g(|w|))$$

f) Eine Sprache $L \subseteq V^+$ heißt g-max-(sum-)zustandsänderungsbeschränkt, wenn wenn es einen g-max-(sum-)zustandsänderungsbeschränkten ZA gibt, der L erkennt.

Zu beachten ist bei Teil d) der Definition, daß es für einen g-max-zustandsänderungsbeschränkten ZA, der eine Sprache L erkennt, nicht ausreicht, daß nur die Wörter aus L mit nicht mehr als g(n) Zustandsänderungen pro Zelle erkannt werden. Auch bei Eingabe eines Wortes aus dem Komplement von L dürfen in keinem Fall mehr als g(n) Zustandsänderungen pro Zelle stattfinden, bevor der ZA die Eingabe ablehnt. Verzichtet man bei der Definition auf diese Bedingung, so erhält man zwar dieselbe Hierarchie von Zustandsänderungskomplexitäten (siehe Kapitel 3), die zu den Komplexitäten gehörenden Sprachklassen sind jedoch umfangreicher. Entsprechendes gilt auch für die sum-zustandsänderungsbeschränkten Zellularautomaten.

Wenn im folgenden von zustandsänderungsbeschränkten (oder einfach von änderungsbeschränkten) Automaten oder Sprachen die Rede ist, so ist stets die max-Zustandsänderungsbeschränkung gemeint. Die sum-Zustandsänderungsbeschränkung wird nur an wenigen Stellen betrachtet, es wird dann explizit darauf hingewiesen.

Definition 2.3 Für $g,\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ wird definiert

a) ÄZA(g) ist die Menge aller von einem g-zustandsänderungsbeschränkten ZA erkannten Sprachen.

b) ÄUZA(g) ist die Menge aller von einem g-zustandsänderungsbeschränkten UZA erkannten Sprachen.

c) $ÄZA_\tau(g)$ ist die Menge aller von einem τ-zeitbeschränkten und g-zustandsänderungsbeschränkten ZA erkannten Sprachen.

d) $ÄUZA_\tau(g)$ ist die Menge aller von einem τ-zeitbeschränkten und g-zustandsänderungsbeschränkten UZA erkannten Sprachen.

Neben ÄZA(g) und ÄUZA(g) werden in dieser Arbeit hauptsächlich die Klassen der von zustandsänderungsbeschränkten ZA und UZA in Realzeit erkannten Sprachen betrachtet. Diese Klassen werden mit $ÄZA_R(g)$ und $ÄUZA_R(g)$ bezeichnet.
Dabei werden im folgenden nur Zustandsänderungsbeschränkungen g mit $g(n) \leq n$ betrachtet. Die Sprachfamilien ÄZA(g) und ÄUZA(g) mit $g(n) \geq n$ sind sehr umfangreich und lassen sich mit den hier vorgestellten Methoden kaum eingrenzen.

Der nächste Satz folgt unmittelbar aus den vorangegangenen Definitionen:

Satz 2.1 **Es sei $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $g(n) \leq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:**

a) $ÄUZA_R(g) \subsetneq ÄZA_R(g) \subsetneq ÄZA(g)$

b) $ÄUZA_R(g) \subsetneq ÄUZA(g) \subsetneq ÄZA(g)$

c) $ÄZA_R(n) = ZA_R$

d) $ÄUZA_R(n) = UZA_R$

e) Ist $\mathfrak{A}$ g-max-zustandsänderungsbeschränkt, dann ist $\mathfrak{A}$ auch $n \cdot g$-sum-zustandsänderungsbeschränkt.